SCHRIFTLICHE MATURAPRÜFUNG 2020

Liechtensteinisches Gymnasium
1937

FACH: *Mathematik*

KLASSE: *7LSb, 7Sa*

NAME/VORNAME:

DATUM/DAUER: *8.Juni 2020, 8:00 – 12:00 Uhr*

PRÜFENDE LEHRPERSON: *Nina Thüringer-Schiestl*

Maximale Punktezahl	Erreichte Punkte	Maturanote
114 Punkte	**Punkte**	

Arbeitshinweise:

- Alle wesentlichen Denkschritte müssen dokumentiert sein. Ergebnisse ohne Begründung geben keine Punkte.
- Zeichnungen und Skizzen müssen klar und vollständig beschriftet sein.
- Verwende keine roten Stifte.
- Angegebene Zwischenergebnisse dienen zur Kontrolle. Rechne in der Folge jedenfalls mit diesen angegebenen Ergebnissen weiter.
- Schreibe deinen Namen auf jedes Blatt, welches du am Schluss abgibst.
- Verwende für jede Aufgabe einen seperaten A3-Bogen.
- Die Darstellung wird bewertet.

Erlaubte Hilfsmittel: Formelsammlung, Taschenrechner (nicht graphikfähig, ohne CAS-System)

	Aufgabe 1	Aufgabe 2	Aufgabe 3	Aufgabe 4	Aufgabe 5	Darstellung
maximal	**36**	**30**	**12**	**12**	**18**	**6**
erreicht						

Viel Erfolg!

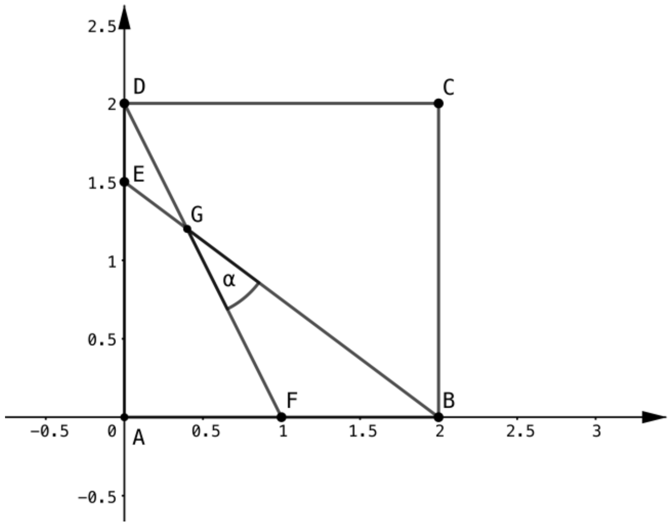
Aufgabe 1: Vektorgeometrie (36 Punkte)

Alle Teilaufgaben der Aufgabe 1 [a) bis e)] **sind unabhängig voneinander.**

Vektorrechnung in zwei Dimensionen (16 Punkte)

a) Gegeben sei das abgebildete Quadrat.

- Berechne die Koordinaten des Punktes G.
- Berechne den Winkel α.



b) Von einem Quadrat $ABCD$ ist die Diagonale $\overline{AC}$ gegeben mit $A(-2|2)$ und $C(5|1)$. Berechne die Koordinaten der Ecken B und D.

c) Berechne die Koordinaten des Punktes auf der Geraden $g: \vec{X} = \binom{4}{3} + t \cdot \binom{2}{3}$, welcher von den Punkten $A(-3|0)$ und $B(-1|4)$ den gleichen Abstand hat.

Vektorrechnung in drei Dimensionen (20 Punkte)

d) Berechne den Abstand des Punktes $P(2 \mid 1 \mid 1)$ von der Geraden $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

e) Eine Pyramide hat als Grundfläche das Dreieck ABC mit den Ecken $A(4 \mid -1 \mid 3)$, $B(2 \mid 1 \mid 5)$, $C(-1 \mid -2 \mid 0)$ und die Spitze $S(0 \mid -5 \mid 5)$.

- Berechne die Koordinaten des Spiegelpunktes von S bezüglich der Ebene ABC.
- Berechne die Höhe der Pyramide und anschliessend ihr Volumen.

Aufgabe 2: Analysis (30 Punkte)

Polynomfunktion (8 Punkte)

Der Graph einer Polynomfunktion dritten Grades geht durch den Punkt $P(0|0)$ und besitzt an der Stelle $x = 4$ einen Wendepunkt mit der Wendetangente $t: y = -3x + 16$.

Bestimme die Funktionsgleichung.

Exponentialfunktion (22 Punkte)

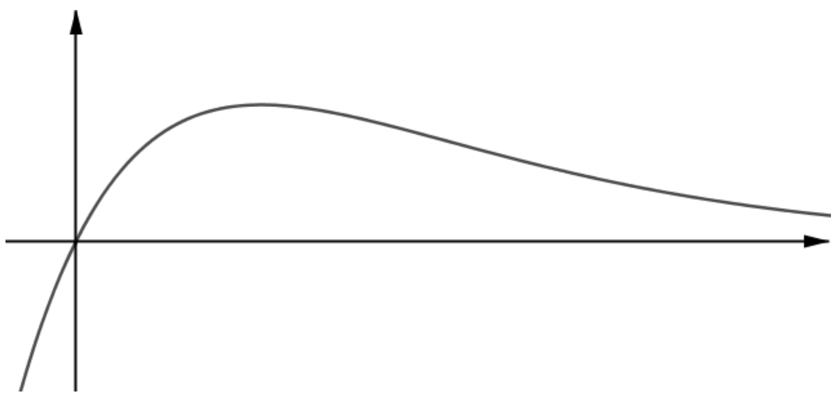
Gegeben ist die Funktion $f(x) = 2x \cdot e^{-\frac{1}{2}x}$

a) Berechne:

- erste und zweite Ableitung
- Nullstelle(n)
- Extrempunkt(e)
- Wendepunkt(e)

→ *Zwischenergebnis:* $f'(x) = e^{-\frac{1}{2}x} \cdot (2 - x)$

b) Zeichne alle errechneten Punkte im abgebildeten Graphen ein und skaliere die Achsen.



c) Zeige durch partielle Integration:

$$\int 2x \cdot e^{-\frac{1}{2}x} dx = e^{-\frac{1}{2}x} \cdot (-4x - 8) + C$$

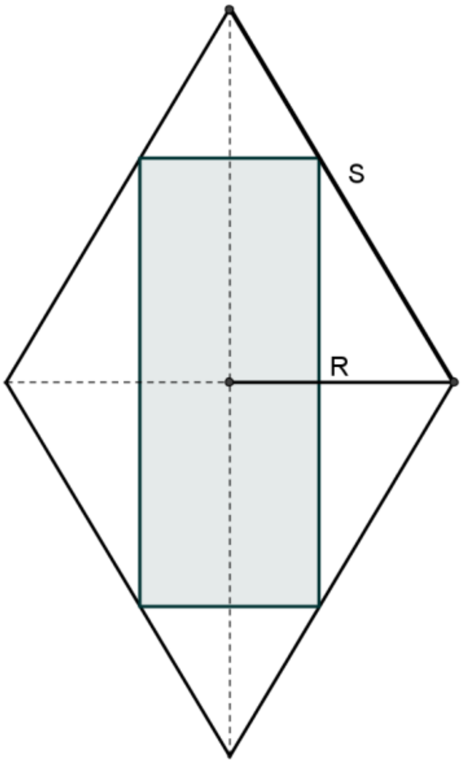
d) Berechne die Fläche, die der Funktionsgraph im ersten Quadranten mit der x-Achse und der Geraden $x = 4$ einschliesst.

Aufgabe 3: Extremwertaufgabe (12 Punkte)

Einem geraden Doppelkegel mit der Seitenkante $S = 5cm$ und dem Radius $R = 3cm$ wird ein gerader Zylinder mit Höhe h und Radius r eingeschrieben. Doppelkegel und Zylinder haben die gleiche Drehachse. Der Zylinder soll ein maximales Volumen haben. Die Abbildung zeigt den Querschnitt der Situation.

a) Zeige, dass $V(r) = \left(8r^2 - \frac{8}{3}r^3\right) \cdot \pi$ eine mögliche Zielfunktion ist.

b) Berechne den Radius r, die Höhe h sowie das Volumen V des Zylinders.
Auf die Überprüfung durch die zweite Ableitung kann verzichtet werden.



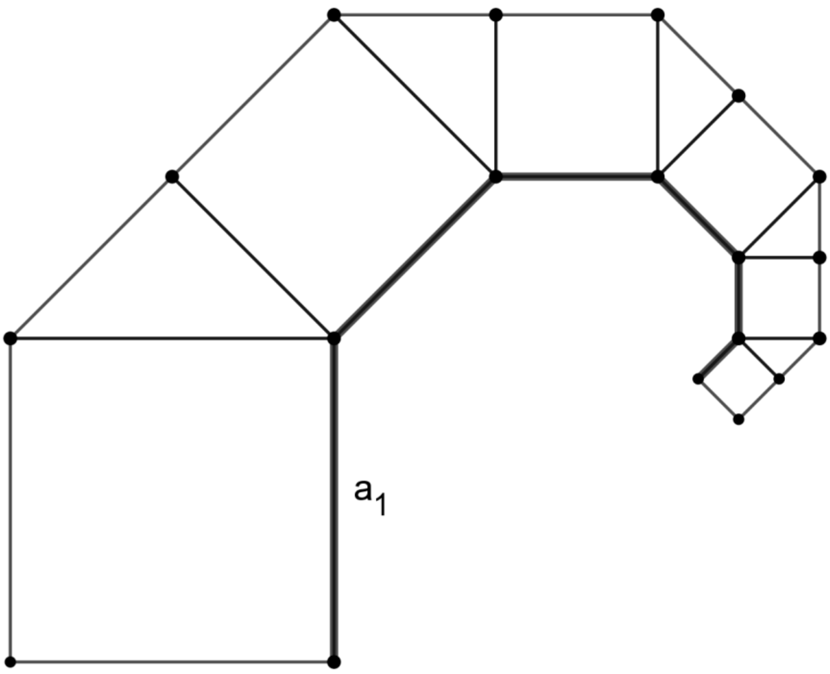
Aufgabe 4: Folgen und Reihen (12 Punkte)

Die untenstehende Figur entsteht wie folgt:
Dem Ausgangsquadrat mit der Seitenlänge $a_1 = 10cm$ wird ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck aufgesetzt. Über der einen Kathete des Dreiecks wird ein Quadrat errichtet. Dieser Ansetzungsprozess wird unendlich oft wiederholt.

a) Berechne die Seitenlängen des zweiten, dritten und vierten Quadrates a_2, a_3 und a_4 und gib eine explizite Bildungsvorschrift für die Berechnung von a_n an.

b) Berechne die Flächen des ersten, zweiten und dritten Dreiecks A_1, A_2 und A_3 und gib eine explizite Bildungsvorschrift für die Berechnung der Dreiecksflächen A_n an.

c) Berechne die Summe **aller** Flächeninhalte und begründe, warum dies möglich ist.



Aufgabe 5: Trigonometrie (18 Punkte)

Ein allgemeines Viereck $ABCD$ ist durch die Länge der drei Seiten $\overline{AB} = 634cm$, $\overline{BC} = 620\ cm$, $\overline{DA} = 153\ cm$ und die beiden Winkel $\alpha = 87.3°$ und $\beta = 115.6°$ gegeben.

a) Berechne die Länge der fehlenden Seite und die fehlenden Winkel des Vierecks.

b) Berechne den Flächeninhalt des Vierecks.

→ *Zwischenergebnis:* $244'149.47\ cm^2$

c) Eine durch den Punkt A gehende Gerade g soll das Viereck in zwei flächengleiche Teile teilen. Bestimme, ob diese Gerade g die Seite $\overline{BC}$ oder die Seite $\overline{CD}$ schneidet. Berechne, wie weit dieser Schnittpunkt von C entfernt ist.