

SCHRIFTLICHE MATURAPRÜFUNG 2020



Liechtensteinisches
Gymnasium
1937

FACH: Mathematik

KLASSE: 7Na

NAME/VORNAME:

DATUM/DAUER: 8. Juni 2020, 08.00 – 12.00

PRÜFENDE LEHRPERSON:

Maximale Punktezahl	Erreichte Punkte	Maturanote
128		

Erlaubte Hilfsmittel:

- Taschenrechner (Nicht Graphik- oder CAS-fähig)
- Formelsammlung

Arbeitshinweise:

- 1) Gib die zur Rechnung nötigen Einzelschritte an.
- 2) Skizzen müssen klar beschriftet sein.
- 3) Schreibe Deinen Namen auf alle verwendeten Blätter.
- 4) Bitte verwende keine ROTEN Stifte.
- 5) Verwende für jede Aufgabe einen separaten A3 Bogen.

	Aufg.1	Aufg.2	Aufg.3	Aufg.4	Darstellung	Total
Punkte	31	32	17	42	6	128
Erreichte Punkte						

**Viel Glück und
gutes Gelingen**

Aufgabe 1: Vektorgeometrie

31 Punkte

Gegeben seien die Ebene

$$E: \vec{r}_x = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 13 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$$

und die Gerade

$$g: \vec{r}_x = \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

a) Schreibe die Ebene E in Koordinatenform. Die Berechnung muss angegeben werden.

Zwischenergebnis: $E: 3x - 4y + 6z = 36$.

b) Bestimme $a \in \mathbb{R}$ so, dass der Punkt $P(3a | -2a | 1 - 2a)$ auf der Ebene E liegt.

c) Die Gerade g schneidet die Ebene E . Berechne den Durchstosspunkt und den Schnittwinkel.

d) Welche Punkte der Geraden g haben zur Ebenen E den Abstand $6\sqrt{61}$?

e) Die drei Koordinatenebenen schliessen mit der Ebene E eine Pyramide ein. Schreibe die Ebene E in Achsenabschnittsform und skizziere sie in ein dreidimensionales Koordinatensystem. Beschrifte nun die Eckpunkte der so entstandenen Pyramide sauber und berechne die Gleichung der Umkugel.

Aufgabe 2: Analysis

32 Punkte

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{-4x^2+9}{(x^2-3)^2}$.

a) Diskutiere die Funktion vollständig: Definitionsbereich, Grenzwerten, Polstellen und deren Art, Nullstellen, Ableitungen, (ohne 3. Ableitung), Extrema, Wendepunkte, Zeichnung vom Graphen.

Alle Gleichungen müssen von Hand ausgerechnet werden d.h. Resultate mit dem Gleichungslöser des Taschenrechners geben keine Punkte.

Zwischenresultate: $f'(x) = \frac{8x^3-12x}{(x^2-3)^3}$ und $f''(x) = \frac{-24x^4-12x^2+36}{(x^2-3)^4}$

b) Berechne die Gleichung der Tangente, welche den Graphen von f an der Stelle $x = 3$ berührt und berechne deren Steigungswinkel.

Aufgabe 3: Wahrscheinlichkeitsrechnung

17 Punkte

Wahrscheinlichkeit und geometrische Folgen und Reihen:

Zwei Kinder, Mario und Werner, spielen Pingpong. Mario schlägt mit einer Wahrscheinlichkeit von 40 % und Werner mit 30 %. **Da Mario etwas unsicherer ist, darf immer er aufschlagen.** Der Aufschlag gilt als ein normaler Schlag und ein Ballwechsel ist dann beendet, wenn einer der Spieler schlägt.

Benutze die Notationen:

V : «Spieler schlägt» (der Ball geht ins Aus, ins Netz oder wird nicht getroffen)

\bar{V} : «Spieler schlägt nicht» (der Ball wird ordentlich retourniert)

a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der insgesamt fünfte Schlag misslingt? Zeichne ein Baumdiagramm.

b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Werner spätestens **seinen** zehnten Ball schlägt und somit Mario den Ballwechsel gewinnt?

c) Rein theoretisch kann der Ballwechsel unendlich lange dauern. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Mario den nächsten Ballwechsel verliert d.h. er schlägt **seinen** ersten Schlag oder **seinen** zweiten oder **seinen** dritten, usw.

10 Punkte

Bedingte Wahrscheinlichkeit und Satz von Bayes:

In einem Wintersportresort haben 60 % der Gäste keine Dauerskikarte für die Zeit des Aufenthaltes und 70 % buchen keine Wellness-Anwendungen. 40 % der Gäste haben weder eine Dauerskikarte noch buchen sie Wellness-Anwendungen.

Benutze folgende Notationen.

D : der Gast hat eine Dauerskikarte für die Zeit des Aufenthaltes

\bar{D} : der Gast hat **keine** Dauerskikarte für die Zeit des Aufenthaltes

W : der Gast bucht Wellness-Anwendungen

\bar{W} : der Gast bucht **keine** Wellness-Anwendungen

Zeichne zur Lösung der folgenden Fragen die geeigneten Baumdiagramme und beschrifte sie jeweils sauber.

a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Gast keine Wellness-Anwendungen bucht, unter der Bedingung, dass er keine Dauerskikarte hat?

b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Gast Wellness-Anwendungen bucht, unter der Bedingung, dass er eine Dauerskikarte hat?

7 Punkte

Aufgabe 4: Vermischte Kurzaufgaben

42 Punkte

Integralrechnung:

Gegeben sei die Funktion $g(x) = (x^2 + 3x)e^{-\frac{1}{5}x}$.

Berechne die Stammfunktion.

7 Punkte

Das Newtonverfahren: (Achtung: Taschenrechner in Bogenmass (Rad))

Gegeben sind die Funktionen $g(x) = \sin(x)$ und $h(x) = \ln(x)$.

a) Skizziere die Funktionen und hebe den Schnittpunkt hervor.

b) Berechne die Schnittstelle mit dem Newtonverfahren bis sich der Wert auf dem Taschenrechner nicht mehr verändert. Gib die Koordinaten des Schnittpunktes an. Der Startwert und die benutzte Iterationsformel müssen klar angegeben werden.

8 Punkte

Vollständige Induktion:

Stelle eine Formel für s_n auf, und beweise ihre Richtigkeit.

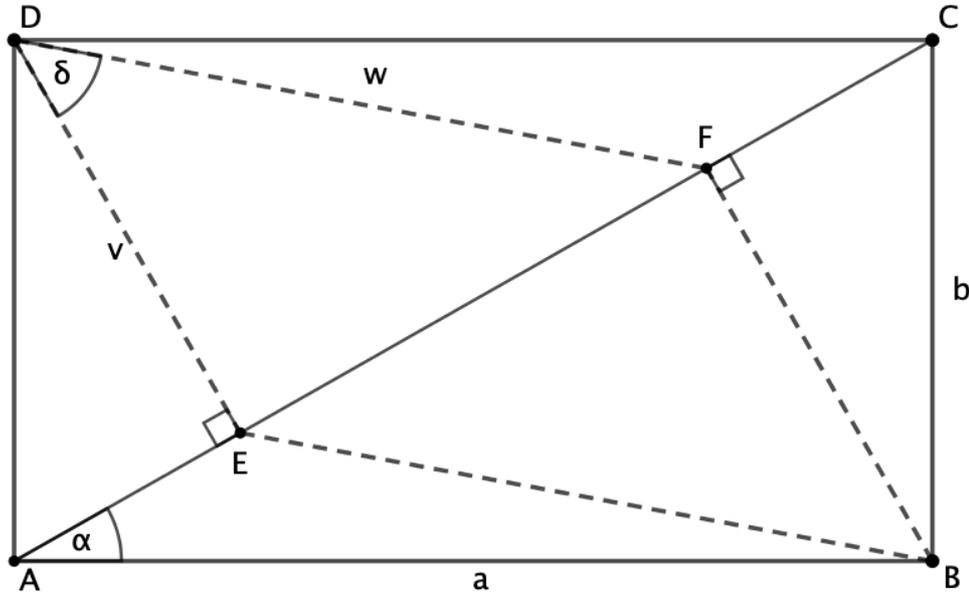
$$s_n = \frac{1}{3 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 12} + \dots + a_n$$

11 Punkte

Aufgabe 4: Vermischte Kurzaufgaben Fortsetzung

Trigonometrie: (Achtung: Taschenrechner in Gradmass (Deg))

Vom Rechteck $ABCD$ sind b und α bekannt.



- a) Berechne δ , falls $\alpha = 31.75^\circ$ und $b = 7$ cm.
- b) **Rechne formal:** drücke den Flächeninhalt des Rechtecks und die Strecke v mit b und α aus.
- c) **Rechne formal:** Zeige, dass \overline{EF} wie folgt formal geschrieben werden kann:

$$\overline{EF} = \frac{b}{\sin(\alpha)} \cdot (1 - 2 \sin^2(\alpha))$$

- d) **Rechne formal:** Drücke die Fläche des Parallelogramms $EBFD$ mit b und α aus.
- e) Berechne die Fläche des Parallelogramms $EBFD$. Die Fläche kann auch ohne die Teilaufgabe d) berechnet werden.

16 Punkte