Liechtensteinisches Gymnasium

SCHRIFTLICHE MATURA 2010

Fach: Mathematik	Prüfer: Dr. Martin Holzer
Klassen: 7SA	Name:

Diese Arbeit umfasst 4 Aufgaben.

Jede der 4 Aufgaben wird mit gleich vielen Punkten bewertet.

Für die Darstellung werden gesondert Punkte vergeben.

Zugelassene Hilfsmittel sind:

Formelsammlung und Taschenrechner CASIO fx-991 ES oder einen dem CASIO fx-991 ES entsprechenden Schultaschenrechner. Kein graphikfähiger Rechner!

Alle wesentlichen Denkschritte müssen dokumentiert sein.

Aufgabe 1:

Gegeben sind folgende drei Funktionsgleichungen:

f_1: $y = \frac{4x-2}{x^2}$; f_2: $y = (1-2x) \cdot e^{-x}$; f_3: $y = (1+2x) \cdot e^{-x}$.

Aufgabenstellung:

a) Diskutieren Sie die Funktion f_1 hinsichtlich folgender Punkte:
   (1) Umfassendste Definitionsmenge,
   (2) Asymptoten,
   (3) Nullstellen,
   (4) Extrema mit Überprüfung durch die zweite Ableitung,
   (5) Wendepunkte ohne Überprüfung durch die dritte Ableitung!

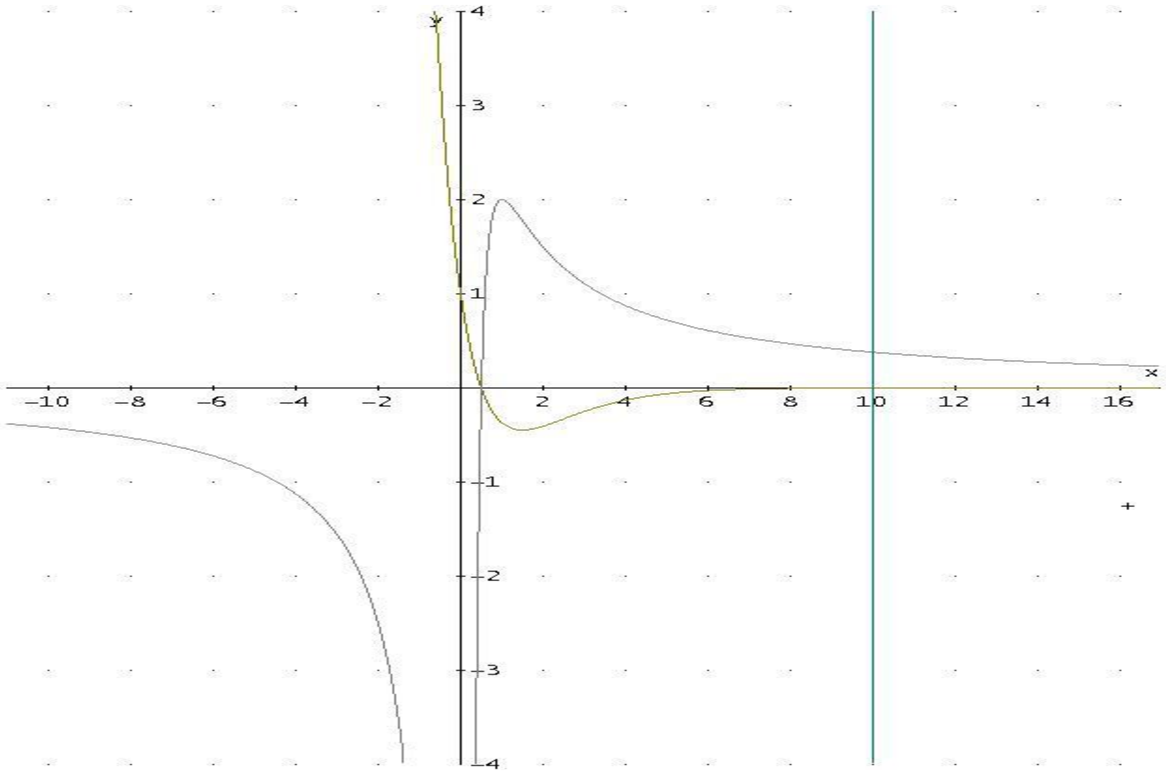
b) Diskutieren Sie die Funktion f_2 hinsichtlich folgender Punkte:
   (1) Nullstellen,
   (2) Extrema ohne Überprüfung durch die zweite Ableitung,

c) Zeigen Sie, dass f_3 eine Stammfunktion von f_2 ist!

d) Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche, die von den beiden Graphen der Funktionen f_1, f_2 und von der Geraden g: x = 10 begrenzt wird!

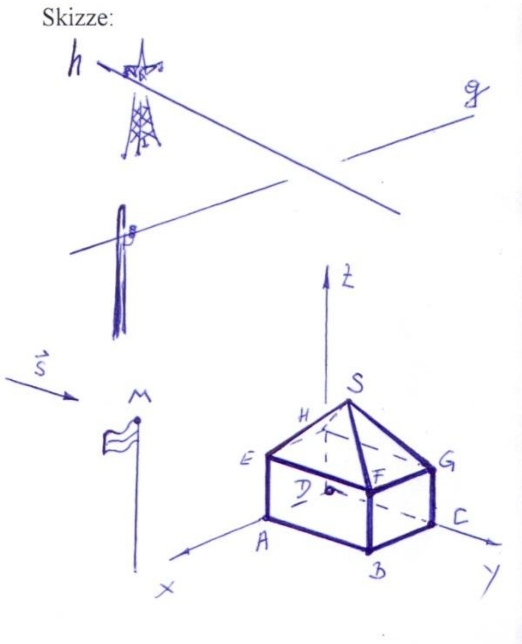
Der Graph soll Ihnen bei den Berechnungen eine Hilfe sein!

Graph:



Aufgabe 2:

In der Skizze ist ein Gebäude dargestellt.
Dieses hat ein Dach, das aus einer geraden, quadratischen Pyramide besteht.
Vor dem Gebäude steht ein Fahnenmast; M ist die Fahnenmastspitze.
In der Nähe befinden sich zwei Stromleitungen, die einander überkreuzen. Im Überkreuzungsbereich können die Leitungen näherungsweise durch die Geraden g und h beschrieben werden.
Bezüglich eines Kartesischen Koordinatensystems (Einheiten im m!), das der Situation zu Grunde gelegt wird, sind nun folgende Angaben bekannt:



- Markante Gebäudepunkte:
  A(4/0/0); B(4/4/0); C(0/4/0); D(0/0/0); E(4/0/2); F(4/4/2); G(0/4/2); H(0/0/2); S(2/2/4).

- „Stromleitungsgeraden":

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -30 \\ 15 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- Fahnenmastspitze M(7/0/3)

- Sonnenstrahlvektor:

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie

a) Das Volumen des Gebäudes,
b) die Fläche des Daches,
c) die Ebenengleichung der Dachfläche [E,F,S] in Koordinatendarstellung,
d) den Schatten, den die Fahnenmastspitze M auf diese Dachfläche wirft (Schnittpunkt Gerade mit Ebene),
e) die kürzeste Entfernung, in der die Stromleitungen einander kreuzen (Abstand windschiefer Geraden),
f) den Winkel zwischen den Stromleitungen,
g) die kürzeste Entfernung, der Dachspitze S zur Stromleitung h.

Aufgabe 3:

Zahlenfolgen:

a) Gegeben ist die Zahlenfolge $\langle a_n \rangle = \left\langle \dfrac{5-n^2}{3n^2-1} \right\rangle$

Aufgabenstellung:

(1) Berechnen Sie die ersten vier Glieder der Folge!

(2) Beweisen Sie, dass die Folge einen Grenzwert besitzt, indem Sie das Monotonieverhalten untersuchen und eine Schranke festlegen!

(3) Berechnen Sie den Grenzwert a der Folge!

(4) Berechnen Sie den Index n_0 ab dem alle Elemente der Folge in der ε-Umgebung des Grenzwertes a liegen für ε = 0,01!

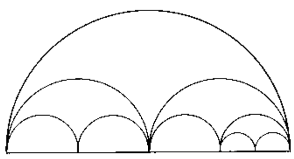
b) Von einer geometrischen Zahlenfolge kennt man das zweite Glied der zugehörigen Partialsummenfolge $s_2 = 80$ und den Quotient $q = \frac{1}{4}$.

Aufgabenstellung:

(1) Berechnen Sie das erste Glied a_1 der geometrischen Folge!
(2) Geben Sie für die geometrische Folge (a_n) und die zugehörige Partialsummenfolge (s_n) Eine explizite Bildungsvorschrift an!
(3) Ist $z = \frac{87381}{1024}$ ein Element der Partialsummenfolge (s_n) ?
Wenn ja, bestimmen Sie die dazu gehörende Anzahl n der Summanden!

c) Über einer 8cm langen Strecke wird ein Halbkreis gezeichnet (Siehe Skizze!). Sein Flächeninhalt sei A_1. Nun wird die Strecke halbiert und über jeder Teilstrecke jeweils ein Halbkreis gezeichnet. Die Summe der Flächeninhalte dieser beiden Halbkreise sei A_2. Diese Teilstrecken werden wiederum halbiert und Halbkreise darüber gezeichnet. Die Summe der Flächeninhalte dieser vier Halbkreise sei A_3. Dieses Verfahren wird beliebig lange fortgesetzt, wobei eine Folge (A_n) entsteht.

Skizze:



Aufgabenstellung:

(1) Berechne Sie die ersten vier Glieder der Folge!
(2) Geben Sie eine explizite Bildungsvorschrift für die Berechnung der A_n an!
(3) Berechnen Sie die Summe aller Flächeninhalte und begründen Sie, warum dies möglich ist!

<u>Aufgabe 4:</u>

Lösen Sie drei der folgenden vier Aufgaben; es werden nur drei Aufgaben bewertet!

a) In einem ebenen Gelände werden von den Endpunkten der Standlinie AB die horizontalen Winkel ∢FAB und ∢FBA zum Fusspunkt F eines senkrechten Mastes gemessen. Von B aus misst man den Höhenwinkel β.
$\overline{AB} = 100m$; $\sphericalangle FAB = 75{,}20°$; $\sphericalangle FBA = 48{,}60°$; $\beta = 13{,}25°$
Fertigen Sie eine Skizze dieser Raumsituation an und berechnen Sie die Höhe des Mastes!

b) Gegeben sind zwei Kreise mit gleich grossen Radien:
k_1: [M_1(3/0); r_1 = 4]; k_2: [M_2(-1/4);r_2 = 4].

Berechnen Sie:
(1) die Koordinaten der Schnittpunkte S_1und S_2der beide Kreise,
(2) den Winkel $\sphericalangle S_1 M_2 S_2$,
(3) den Umfang der Durchschnittsfläche der beiden Kreise,

c) Radioaktive Elemente zerfallen exponentiell. Cäsium 137 hat eine Halbwertszeit von 33 Jahren d.h. nach 33 Jahren ist von einer beliebigen Menge die Hälfte zerfallen.
(1) Zu Beginn einer Beobachtung sind 200mg Cäsium 137 vorhanden. Bestimmen Sie die Exponentialfunktion f, die den Zerfall von Cäsium 137 mit diesem Anfangswert beschreibt! (Die Funktion f ordnet der Zeit [Jahre] die jeweils noch vorhandene Cäsiummenge [mg] zu.)
(2) Berechnen Sie, nach welcher Zeit von den 200mg nur noch 40mg vorhanden sind!
(3) Geben Sie an, wie viel Prozent die jährliche Abnahme beträgt!
(4) Zeichnen Sie einen Graph für den Zeitraum 0 bis 100 Jahre! Kennzeichnen Sie in Ihrem Graphen die Halbwertszeit und überprüfen Sie Punkt (2)!
Einheit auf der x-Achse: 1cm entspricht 10 Jahren
Einheit auf der y-Achse: 1cm entspricht 20 mg.

d) Einer Kugel mit Radius R werden Drehzylinder eingeschrieben. Berechnen Sie die Abmessungen und das Volumen jenes Zylinders, der das grösste Volumen hat!