

Liechtensteinisches Gymnasium Vaduz
Schriftliche Maturaprüfungen 2005
Mathematik
7Wa

- Diese Arbeit umfasst 5 Aufgaben.
 - Hilfsmittel: Formelsammlung und CAS -Taschenrechner TI - Voyage.
 - Alle Lösungswege sind zu dokumentieren, Rechnerergebnisse allein geben keine Punkte.
 - Auf die Darstellung wird geachtet, sie zählt mit.
-

1. Gegeben sind die Punkte $A(5/5/-3)$, $B(3/4/-1)$ und $C(5/2/0)$ sowie

$$\text{die Gerade } g : \vec{r} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ mit } \lambda \in \mathbb{R}.$$

- 1.1. Bestimme die Koordinatengleichung der Ebene $E=(ABC)$.
- 1.2. Berechne den Schnittpunkt von E und g und den Winkel zwischen ihnen.
- 1.3. Zeige, ohne den Satz von Pythagoras zu verwenden, dass das Dreieck ABC rechtwinklig gleichschenkelig ist.
- 1.4. Bestimme einen vierten Punkt P so, dass das Viereck $ABCP$ ein Quadrat ist.
- 1.5. Für welche Punkte S auf der Geraden g misst der Rauminhalt der (schiefen) quadratischen Pyramide $ABCPS$ genau 18 Volumeneinheiten?

Hinweis: Falls du P nicht finden konntest, solltest du diesen Teil der Aufgabe trotzdem lösen können.

2. Ein gerader Kreiszyylinder mit der Höhe 3 und dem Radius 1 wird mit einem geraden Kreiskegel umgeschrieben. Welche Höhe und welchen Radius soll der Kegel haben, damit
- a) seine Mantelfläche möglichst klein wird?
 - b) sein Volumen maximal wird?

Ein klarer Lösungsweg mit einer Skizze und mit wesentlichem Kommentar ist verlangt.

3. Der Graph einer Funktion f mit $f(x) = 2x^3 - ax^2$ (a ist positiv) hat an der Stelle $x = \frac{2}{3}$ einen Wendepunkt.

3.1. Bestimme die Gleichung von f .

3.2. Bestimme die exakten Nullstellen, Extremstellen, Wendepunkt sowie die Gleichung der Wendetangenten und skizziere den Graphen.

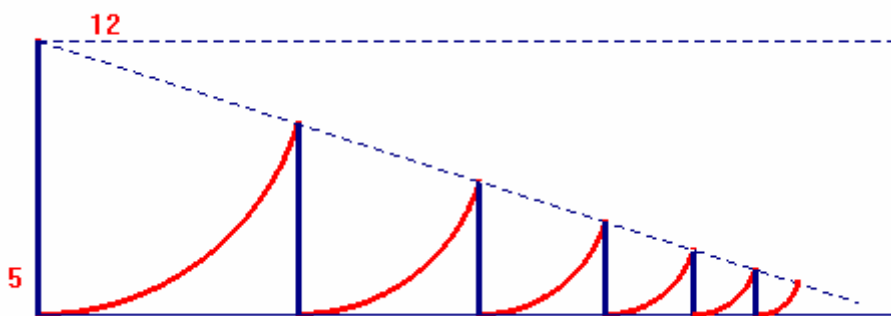
3.3. Wie ist a zu wählen, damit der Schnittwinkel von f mit der positiven x -Achse 45° beträgt?

3.4. Wie ist a zu wählen, damit der Flächeninhalt zwischen f und der positiven x -Achse gleich 216 ist?

4. Der gezeichnete Weg setzt sich abwechselnd aus Strecken und Kreisbögen zusammen. Er beginnt in der linken oberen Ecke des Rechtecks (Länge 12, Breite 5) und führt in die rechte untere Ecke. (dicke Linie).

4.1. Wie lang wird der Gesamtweg, der aus unendlich vielen Teilen besteht?

4.2. Wie viel Prozent der Rechtecksfläche macht die Gesamtfläche aller sichtbaren Kreisteile aus?



5. Kurzaufgaben:

Wähle **genau zwei** der vier folgenden Teilaufgaben. Deklariere exakt, welche Lösungen zu bewerten sind.

5.1. Um die Länge eines Sees zu bestimmen, werden von einem 835 m über Seehöhe gelegenen Berggipfel zu zwei an den beiden Enden des Sees gelegenen Punkten A und B folgende Vermessungen vorgenommen: Von der Bergspitze aus sieht man A unter dem Tiefenwinkel 22.5° und nach dem Schwenken des Messinstrumentes um einen Horizontalwinkel von 77.3° den Punkt B unter dem Tiefenwinkel 25.7° . Wie lang ist der See? *Skizze!*

5.2. Die Energie, die beim Erdbeben in Form von seismischen Wellen abgestrahlt wird, kann aus der empirischen Beziehung $\log(E) = 11.4 + 1.5 \cdot M$ berechnet werden. M- bedeutet Magnitude [1-9 (Richterskala)].

5.2.1. Erläutere die Aussage: „Jeder ganze Wert repräsentiert etwa 31.5-mal mehr [Energie] als der vorangehende.“ Belege mit entsprechender Berechnung.

5.2.2. Vergleiche die ausgestrahlten Energien bei den Erdbeben mit den Stärken $M_1 = 4.6$ (Liechtenstein 1991) und $M_2 = 6.7$ (Japan, 20.04.2005).

5.3. Gegeben seien die Punkte A(8/0/8) und B(10/3/10), sowie die Gerade

$$h: \vec{r} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass die Geraden (AB) und h windschief sind und berechne den Abstand der Geraden h von A.

5.4. Ermittle die Gleichungen der beiden Tangenten, die durch den Punkt (0/0) gehen und den Kreis $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 17.75 = 0$ berühren.
[Auf 2 Dezimalstellen genau.]