

Liechtensteinisches Gymnasium Vaduz

Schriftliche Maturaprüfungen 2006

Mathematik /Grundlagenfach/

Klasse 7Sa
(Gabriela Lidzbarska)

Name:

Prüfungsdauer	4 Stunden
Erlaubte Hilfsmittel	Formelsammlung und Taschenrechner HP 32SII.
Bewertung	Jede Aufgabe wird mit gleich vielen Punkten bewertet.

In der Aufgabe **5** sind **genau 2 aus** den 3 Aufgaben zu wählen und zu lösen.
Deklariere genau, welche Aufgabe zu bewerten ist.

Zu jeder Aufgabe gehört ein ausführlicher Lösungsweg!
Es wird Wert auf eine saubere und übersichtliche Darstellung gelegt.

- **Jede Aufgabe ist auf einem neuen Blatt zu beginnen.**
- **Jedes Blatt ist mit Seitennummer, Namen und Klasse zu beschriften.**

Aufgabe 1

Gegeben ist die Funktion f mit

$$f(x) = (k - e^x)^2, \quad k \in \mathbb{R}, k > 0.$$

- Bestimme den Parameter $k > 0$, so dass die Funktion f die y -Achse bei 4 schneidet.
Wenn du k nicht bestimmen konntest, rechne mit $k=3$ weiter.
- Bestimme Definitions- und Wertemenge von f .
- Bestimme sämtliche Nullstellen, sowie Hoch-, Tief- und Wendepunkte von f .
- Zeichne den Graphen von f . [*Platzbedarf: $-2.5 < x < 2$, $-2 < y < 15$*].

Aufgabe 2

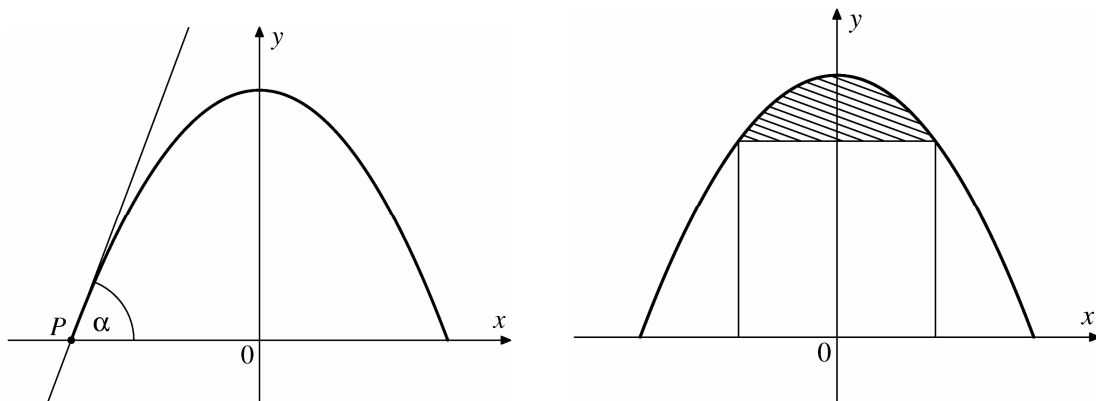
Gegeben sind die fünf Punkte $A(-3/-3/2)$, $B(7/1/-8)$, $C(1/13/-2)$, $D(-11/13/10)$ und $S(5/5/12)$

sowie die Gerade $g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

- Zeige, dass die vier Punkte A,B,C, D in einer Ebene ε liegen. Ermittle die Koordinatengleichung der Ebene ε .
- Zeige, dass die vier Punkte ein Trapez bilden.
- Berechne den Schnittpunkt der Geraden g mit der Ebene ε . Unter welchem Winkel wird die Ebene ε durch die Gerade g geschnitten?
- Wie weit ist der Punkt S von der Geraden g entfernt?
- Berechne das Volumen der Pyramide mit der Grundfläche ABCD und der Spitze S.

Aufgabe 3

Ein parabelförmiger Torbogen lässt sich mit der Funktion $y = 4 - \frac{4}{9}x^2$ beschreiben.



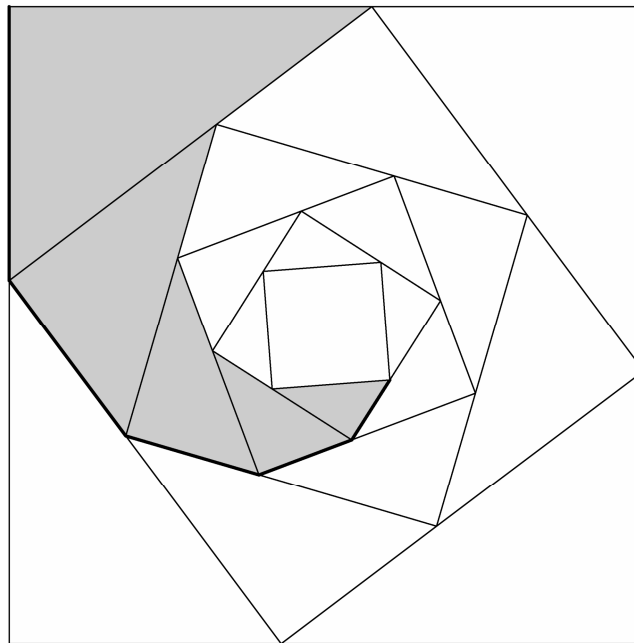
- Gib die Gleichung der in der Abbildung links eingezeichneten Tangente an und berechne ihren Neigungswinkel zum Boden.
- In den Torbogen soll eine rechteckige Tür gebaut werden (siehe rechte Abbildung). Drei Architekten streiten sich über „optimale“ Breite und Höhe der Tür.
 - Architekt A hätte gerne eine quadratische Tür.
 - Für Architekt B kommt nur diejenige Tür in Frage, welche den maximalen Flächeninhalt hat.

- iii. Architekt C ist etwas extravagant und möchte eine Tür, bei der die in der rechten Skizze schraffierte Fläche genau den Flächeninhalt 1 m^2 hat.

Berechne Höhe und Breite der drei Türen.

Aufgabe 4

Gegeben ist ein Quadrat der Seitenlänge 7 cm . Jede Seite wird im Verhältnis $3:4$ geteilt. Die Teilpunkte bilden ein neues Quadrat, dessen Seiten wieder im Verhältnis $3:4$ geteilt werden. Die neuen Punkte bilden wieder ein Quadrat, usw. Das Prozedere wird in Gedanken fortgesetzt.



- Weise rechnerisch nach, dass die Quadratseiten eine geometrische Folge bilden.
- Berechne die Länge der dick gezeichneten spiraligen Linie.
- Wie lange kann diese Linie maximal werden, wenn der Zeichenvorgang unendlich fortgesetzt wird?
- Wie viele Strecken müssen addiert werden, damit deren Gesamtlänge mindestens 9.5 cm beträgt?
- Wie viel Prozent der Fläche des Ausgangsquadrats ist nach 20 Schritten schattiert?

Aufgabe 5

Kurzaufgaben

Aus den 3 Aufgaben sind **genau 2** zu wählen und zu lösen. Deklarriere genau, welche Aufgabe zu bewerten ist.

- a) Überprüfe die Korrektheit der Berechnung:

$$\int \frac{2x(x^2 + 12)}{(x^2 - 4)^3} dx = \frac{x^4 - 9x^2 + 12}{(x^2 - 4)^2} + C$$

- b) Ein Kreis um M und mit Radius r geht durch die folgenden Punkte: O(0/0), A(2/0), B(0/6).
- Ermittle den Mittelpunkt und den Radius des Kreises und gib seine Gleichung an.
 - Berechne den Teil der Kreisfläche, der unterhalb der x-Achse liegt.

- c) Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx, \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

- Drücke b und c mit Hilfe von a aus, so dass der Graph von f an der Stelle 1 einen Hochpunkt und an der Stelle 2 einen Wendepunkt hat.
- Bestimme a für den Fall, dass die von f und der x-Achse eingeschlossene Fläche den Inhalt 9 hat.

Viel Glück!