

Liechtensteinisches Gymnasium Vaduz
Schriftliche Maturaprüfungen 2006
Mathematik

Klasse 7La

Diese Arbeit umfasst fünf Aufgaben.

Zugelassene Hilfsmittel sind die Formelsammlung und der CAS-Rechner TI-Voyage.

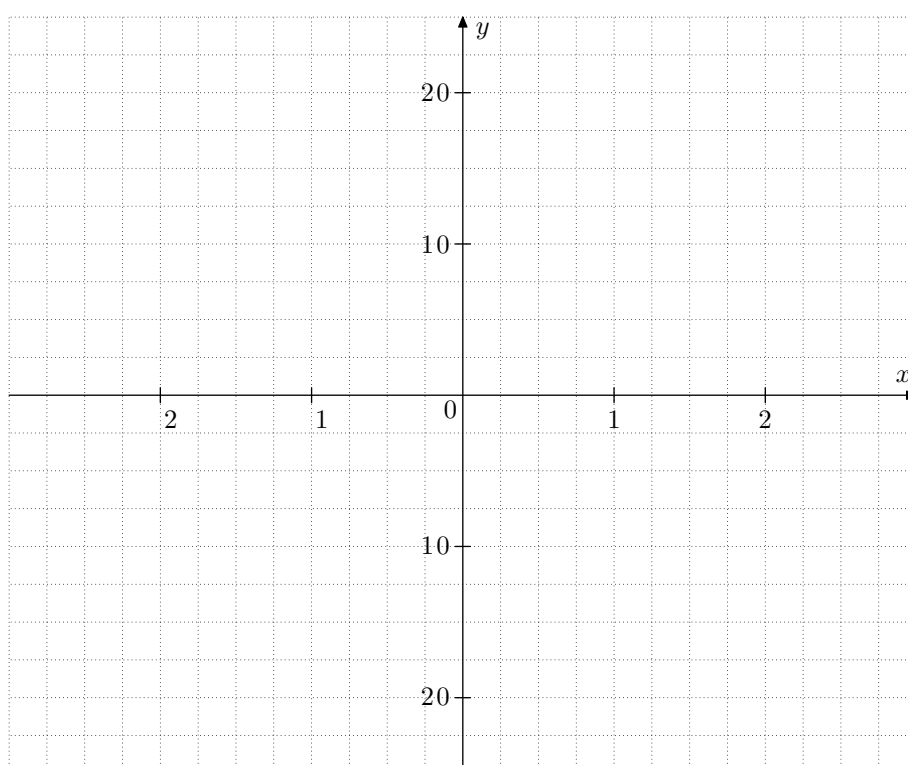
Alle wesentlichen Denkschritte müssen dokumentiert sein, Rechnerergebnisse allein geben keine Punkte.

Beginne mit jeder Aufgabe auf einem neuen Blatt.

Alle Aufgaben werden mit gleich vielen Punkten bewertet.

1. Gegeben sei die Kurvenschar $f(x) = (k - e^x)^2$ mit dem Scharparameter $k \in \mathbb{R}$.

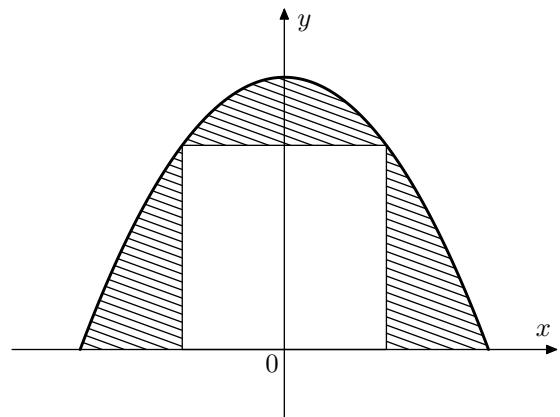
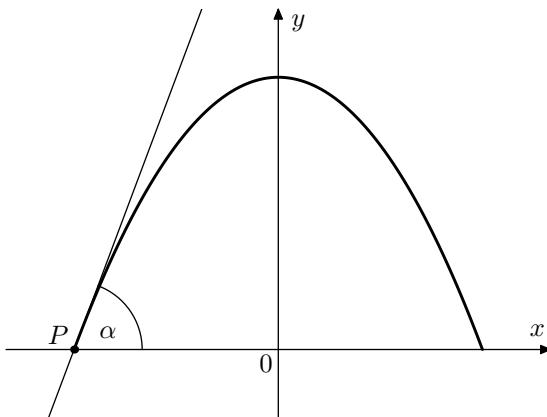
- (a) Bestimme den Parameterwert $k > 0$ so, dass die Funktion f die y -Achse bei 4 schneidet.
Wenn du k nicht bestimmen konntest, rechne mit $k = 3$ weiter.
- (b) Bestimme Definitions- und Wertebereich von f .
- (c) Bestimme die Nullstellen, Hoch- und Tiefpunkte, Wendepunkte von f .
- (d) Wie verhält sich f für $x \rightarrow \infty$ und für $x \rightarrow -\infty$?
- (e) Zeichne den Graphen von f ins abgebildete Koordinatensystem ein.



2. Gegeben seien die fünf Punkte $A(-3/-3/2)$, $B(7/1/-8)$, $C(1/13/-2)$, $D(-11/13/10)$ und $S(5/5/12)$ und die Gerade $g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

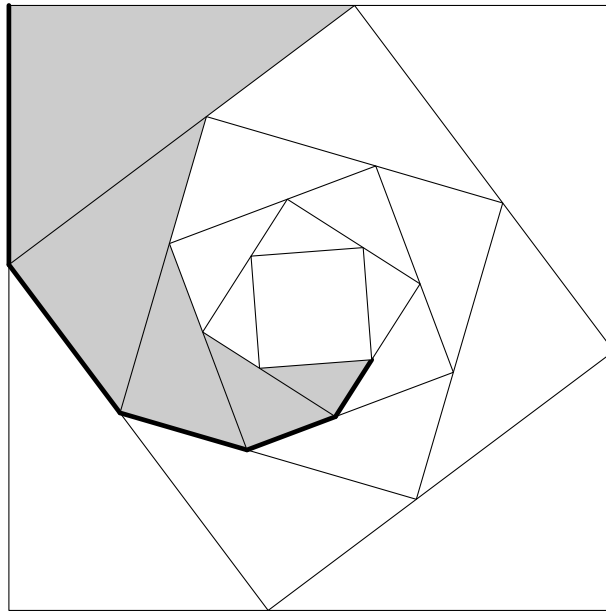
- Zeige, dass die vier Punkte A , B , C und D in einer Ebene liegen. Bestimme die Koordinatengleichung dieser Ebene ε .
- Zeige, dass die vier Punkte A , B , C und D ein Trapez bilden.
- Berechne die Koordinaten des Punktes, in welchem die Gerade g die Ebene ε schneidet. Unter welchem Winkel schneidet die Gerade die Ebene?
- Wie weit ist der Punkt S von der Geraden g entfernt?
- Berechne das Volumen der Pyramide mit der Grundfläche $(ABCD)$ und der Spitze S ?

3. Ein parabelförmiger Torbogen lässt sich durch die Funktion $f(x) = 4 - \frac{4}{9}x^2$ beschreiben.



- Gib die Gleichung der in der linken Abbildung eingezeichneten Tangente an und berechne den Winkel α zwischen Boden und Tangente.
- In den Torbogen soll eine rechteckige Tür gebaut werden (siehe Abbildung rechts). Drei Architekten haben verschiedene Auffassungen der optimalen Breite und Höhe der Türe:
 - ▷ Architekt A hätte gerne eine quadratische Türe.
 - ▷ Für Architekt B kommt nur diejenige Türe in Frage, welche maximalen Flächeninhalt hat.
 - ▷ Architekt C ist etwas extravagant und möchte gerne eine Türe, für die die drei schraffierten Flächen denselben Inhalt haben.
 Berechne Länge und Breite der drei Türen.

4. Gegeben sei ein Quadrat der Seitenlänge 7m. Seine Seiten werden im Verhältnis 3:4 geteilt und durch Verbinden der Teilpunkte ein neues Quadrat erzeugt, mit dem auf dieselbe Weise verfahren wird



- Zeige, dass die Folge der Quadratseiten geometrisch ist.
- Berechne die Länge der dick gezeichneten spiralförmigen Linie.
- Wieviele Strecken müssen gezeichnet werden, damit deren Gesamtlänge mindestens 9.5m beträgt?
- Wie lange kann die Linie maximal werden, wenn der Zeichenvorgang ad infinitum fortgesetzt wird?
- In jedem der Quadrate wird entsprechend der obigen Skizze ein bestimmter Flächenteil schattiert. Wie viel Prozent der Fläche des Ausgangsquadrats macht dies nach 20 Schritten aus?

5. Löse zwei der drei Kurzaufgaben

- Bestimme die Gleichung einer Sinus-Funktion mit der Periodenlänge 5, der Amplitude 2 und der Phase $\frac{\pi}{3}$?
- Zeige ohne Rechner die Gültigkeit der Gleichung $\int (ax + b) \cdot e^{-x} dx = -(ax + a + b) \cdot e^{-x} + C$ und gib mit ihrer Hilfe eine Stammfunktion von $f(x) = (x + 2) \cdot e^{-x}$ an.
- Zu bestimmen ist eine Funktion vom Typ

$$f(x) = ax^4 + bx^2 + c, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

Welche Bedingungen müssen a , b und c erfüllen, damit der Graph von f an drei Stellen eine horizontale Tangente hat?