



Prüfungsaufgaben der schriftlichen Matura 2006 Mathematik (Grundlagenfach)

Klasse 7Wa (Daniel Oehry)

Name: _____

Hilfsmittel: Formelsammlung, Taschenrechner HP32SII oder HP33S

Bewertung: Jede der Aufgaben 1 bis 5 wird mit gleich vielen Punkten bewertet. Von der fünften Aufgabe sind nur zwei Teilaufgaben zu lösen.

Dauer: 4 Stunden

Hinweise: Achte auf eine saubere Darstellung und nachvollziehbare Lösungswege. Die Aufgaben können in beliebiger Reihenfolge gelöst werden. Jede Aufgabe ist auf einem neuen Blatt zu beginnen.

Aufgabe 1

Gegeben ist die Funktion f mit

$$f(x) = (k - e^x)^2, \quad k \in \mathbb{R}, k > 0.$$

a) Bestimme den Parameter $k > 0$, so dass der Graph von f die y -Achse bei 4 schneidet.

Wenn du k nicht bestimmen konntest, rechne mit $k = 3$ weiter.

b) Bestimme Definitions- und Wertemenge von f .

c) Bestimme sämtliche Nullstellen, sowie Hoch-, Tief- und Wendepunkte von f .

d) Wie verhält sich $f(x)$ für $x \rightarrow -\infty$ und für $x \rightarrow +\infty$?

e) Zeichne den Graphen von f in ein Koordinatensystem ein ($-6 \leq x \leq 2$, 1 LE = 1 cm).

Aufgabe 2

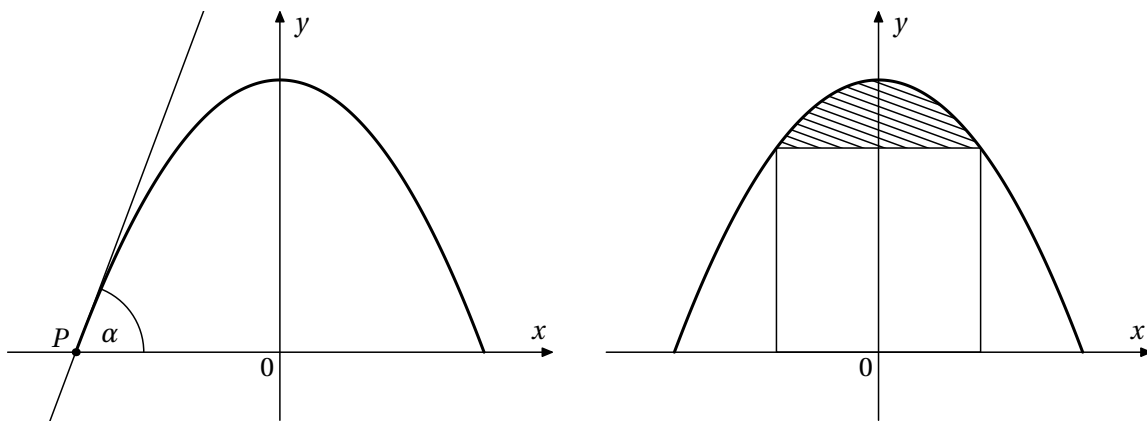
Gegeben sind die fünf Punkte $A(-3/-3/2)$, $B(7/1/-8)$, $C(1/13/-2)$, $D(-11/13/10)$ und $S(5/5/12)$ sowie die Gerade

$$g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- Zeige, dass die vier Punkte A , B , C und D in einer Ebene ε liegen. Ermittle die Koordinatengleichung der Ebene ε .
- Zeige, dass die vier Punkte A , B , C und D ein Trapez bilden.
- Bestimme den Schnittpunkt der Geraden g mit der Ebene ε . Unter welchem Winkel schneidet die Gerade die Ebene?
- Berechne das Volumen der Pyramide mit der Grundfläche $ABCD$ und der Spitze S .

Aufgabe 3

Ein parabelförmiger Torbogen lässt sich mit der Funktion $y = 4 - \frac{4}{9}x^2$ beschreiben.

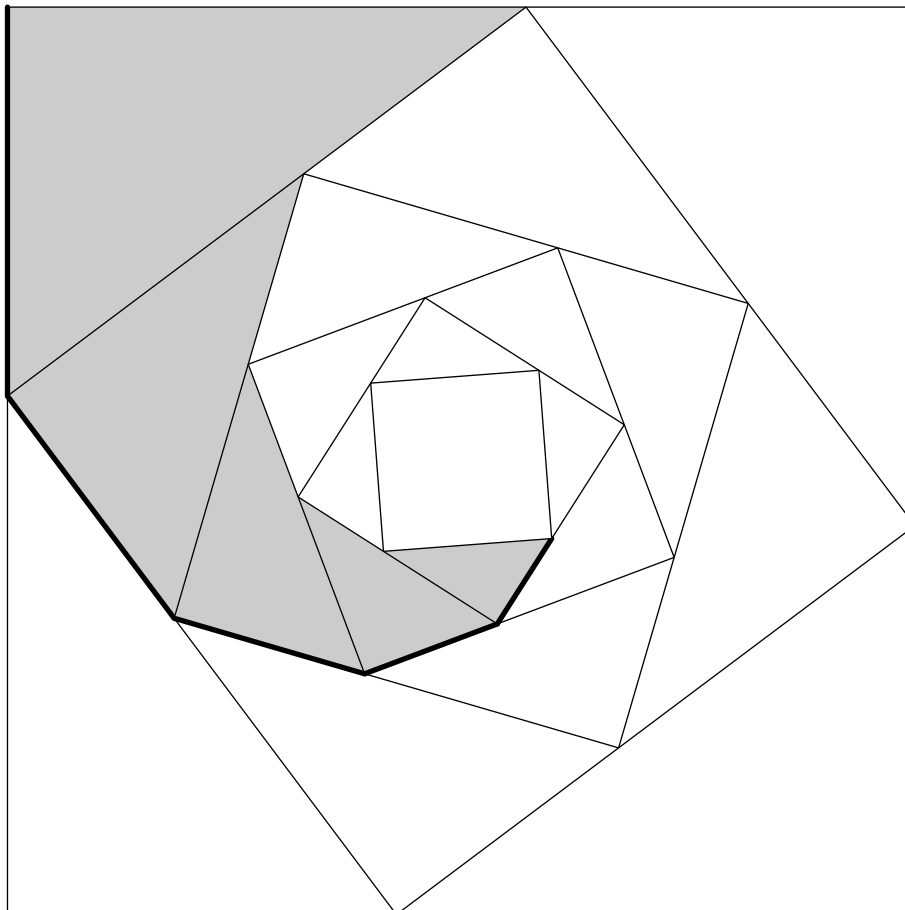


- Gib die Gleichung der in der Abbildung links eingezeichneten Tangente an und berechne den Winkel α zwischen Boden und Tangente.
- In den Torbogen soll eine Tür gebaut werden (siehe Abbildung rechts). Drei Architekten streiten sich über die „optimale“ Breite und Höhe der Tür.
 - ▷ Architekt A hätte gerne eine quadratische Tür.
 - ▷ Für Architekt B kommt nur diejenige Tür in Frage, welche den maximalen Flächeninhalt hat.
 - ▷ Architekt C ist etwas extravagant und möchte eine Tür, bei der die in der Skizze schraffierte Fläche genau den Flächeninhalt 1 m^2 hat.

Berechne Länge und Breite der drei Türen.

Aufgabe 4

Gegeben ist ein Quadrat der Seitenlänge 7 cm. Jede Seite wird im Verhältnis 3 : 4 geteilt. Die Teilpunkte bilden ein neues Quadrat, dessen Seiten wieder im Verhältnis 3 : 4 geteilt werden. Die neuen Teilpunkte bilden wieder ein Quadrat, usw. Das Prozedere wird in Gedanken fortgesetzt.

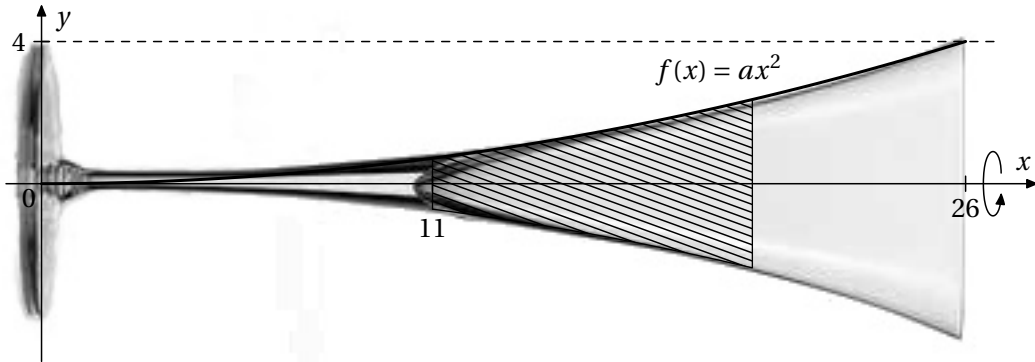


- Zeige, dass die Folge der Quadratseiten geometrisch ist.
- Berechne die Länge der dick gezeichneten spiralförmigen Linie.
- Aus wievielen Teilstrecken muss diese Linie mindestens bestehen, damit ihre Gesamtlänge 9,5 cm übertrifft?
- Wie lang kann diese Linie maximal werden, wenn der Zeichenvorgang unendlich fortgesetzt wird?
- In jedem der Quadrate wird entsprechend der obigen Skizze ein bestimmter Flächenteil markiert. Wieviel % der Fläche des Anfangsquadrats sind nach 20 Schritten schattiert?

Aufgabe 5

Aus den folgenden drei Aufgaben sind **genau zwei** zu wählen und zu lösen.

- 5.1) Das abgebildete Sektglas ist 26 cm hoch und hat bei der Öffnung oben einen Durchmesser von 8 cm. Wenn man das Glas hinlegt, kann die Randkurve relativ genau durch eine Funktion der Form $f(x) = ax^2$ angenähert werden. Das Volumen des Glases lässt sich dann als Rotationskörper berechnen.



- a) Bestimme die Vorschrift von f .
- b) Wenn du die Abbildung genau anschaust, siehst du, dass der untere Teil des Glases bis zu einer Höhe von 11 cm nicht hohl ist. Bis zu welcher Höhe muss das Glas aufgefüllt werden, damit es genau 1 dl fasst?
- 5.2) Ein Kreis geht durch die Punkte $O(0/0)$, $A(2/0)$ und $B(0/6)$.
- a) Ermittle Mittelpunkt und Radius des Kreises und gib seine Gleichung an.
- b) Welcher Bruchteil der Kreisfläche befindet sich unterhalb der x -Achse?
- 5.3) Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = ax^4 + bx^2 + c, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0.$$

- a) Welche Bedingungen müssen a , b und c erfüllen, damit der Graph von f drei Punkte mit horizontaler Tangente hat?
- b) Bestimme a , b und c für den Fall, dass einer der drei Punkte mit horizontaler Tangente die Koordinaten $P(2/0)$ und die vom Graphen von f und der x -Achse eingeschlossene Fläche den Inhalt 12,8 hat.